ارزیابی معیارهای رشد ترک در پلیمر مدرج تابعی به‌روش اجزای محدود*

مهدی نجیمی[۱]   فرهاد حاجی‌ابوطالبی[۲]   حمید بهشتی[۳]

چکیده *در این پژوهش، ابتدا معیارهای مختلفی مانند معیار بیشینه تنش مماسی، بیشینه نرخ رهایش انرژی و کمینه چگالی انرژی کرنشی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. سپس با به‌کارگیری روش انتگرال تعاملی (انتگرال M) در یک پلیمر مدرج تابعی، ضرایب شدت تنش برای حالت‌های مختلف جهت‌گیری ترک و خواص مکانیکی ماده محاسبه می‌گردد. بااستفاده از نتایج حاصل، زاویهٔ آغاز ترک از معیارهای مختلف به‌دست آمده و با نتایج تجربی موجود در مقالات مقایسه می‌شود. نتایج آشکار می‌کند که پیش‌بینی‌های معیارهای بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی به‌هم نزدیک است ولی معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی از دقت بهتری برخوردار است. در آخر، مسیر رشد ترک محاسبه شده با نتایج تجربی موجود در پژوهش‌ها مقایسه می‌گردد و دقت معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی، نشان داده می‌شود.*

واژه‌های کلیدی معیارهای رشد ترک; پلیمر مدرج تابعی; روش انتگرال تعاملی; روش اجزای محدود.

Evaluation of Crack Growth Criteria in Functionally Graded Polymer using Finite Element Method

M. Najimi   F. Haji Aboutalebi   H. Beheshti

Abstract *In this research first, different fracture criteria such as maximum tangential stress, maximum strain energy release rate, and minimum strain energy density are evaluated. Then, employing the interaction integral (M-integral) method in a functionally graded polymer, stress intensity factors for different directions of the crack orientation and mechanical properties are calculated. Applying the achieved results, the initiation angle of the crack is obtained by the various fracture criteria and compared with the experimental results existed in the papers. The results reveal that the predicted results of the maximum tangential stress and the minimum strain energy density criteria are close to each other but, the minimum strain energy density criterion has better accuracy. Finally, the calculated crack growth path is compared with the experimental results existed in the researches and the accuracy of the minimum strain energy density criterion is shown.*

Key Words Crack Growth Criteria; Functionally Graded Polymer; Interaction Integral Method; Finite Element Method

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۶/۲۴ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۹/۳۰ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i2.49913

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان. f.hajiaboutalebi@eng.ui.ac.ir

(۳) دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان.

مقدمه

با توسعهٔ فناوری و نیاز به موادی که علاوه بـر سـختی مطلـوب و مقاومـت حرارتـی زیـاد دارای خاصـیت چقرمگی بالا نیز باشند، پژوهشگران مجبور به ساخت مواد ترکیبی شدند. به همین دلیل مواد مرکب بـه‌عنـوان موادی که خواص آنها به‌صورت لایه‌ای تغییر مـی‌کـرد ساخته شدند. این تغییر لایه باعث تمرکز تنش گردید و محققان را بـر آن داشـت تـا مـوادی بـا تغییـر پیوسـتهٔ خواص را ابداع نمایند.

مـواد مـدرج تـابعی (Functionally Graded Materials)، مـواد مرکبـی هسـتند کـه خـواص آنهـا به‌صورت پیوسته و تابعی از موقعیت، تغییر می‌کند. این مـواد بـرای اولـین بـار در سـال ۱۹۸۴ در آزمایشـگاه هوافضای ژاپن بـا ریزسـاختار نـاهمگن تولیـد شـد و خواص مکانیکی آنها به‌صورت تـدریجی و پیوسـته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کرد. ایـن پیوسـتگی در تغییرات باعث کاهش تنش‌های پسـماند و نیـز کـاهش ضرایب شدت تنش گردید. مـواد مـدرج تـابعی طیـف گسترده‌ای از کاربردهای تجاری شامل ابزارهای بـرش، ابزارهای زیست‌پزشکی، فیبرهای نوری و پوشش‌هـای مقاوم به سایش و حرارت را شامل می‌شوند [1].

تحقیقات نشان می‌دهد رایج‌ترین مـود گسـیختگی در این مـواد، ایجـاد تـرک و رشـد آن اسـت. تـاکنون پژوهش‌های مختلفی بر روی مواد مدرج تـابعی انجـام گرفته که در ادامه به چند مورد مهم آن اشاره می‌گردد.

جین و نودا [2] نشان دادند که میدان‌هـای اطـراف نوک ترک و حالت تکینی در مواد مدرج تابعی هماننـد مـواد همگـن اسـت، بـه شـرط آن‌کـه تغییـر خـواص به‌صـورت پیوسـته تعریـف گـردد. اردوغـان و وو [3] صفحه‌ای ترک‌دار تحت بار با ضریب پواسـون ثابـت و ضریب یانگ متغیر نمایی را مورد مطالعـه قـرار دادنـد. نتیجهٔ تحقیقـات ایشـان یکـی از بهتـرین تحلیـل‌هـای موجود برای مقایسه با نتایج اجزای محـدود مـی‌باشـد. هوانگ و همکـاران [4]، تحلیـل آسـیب ناحیـهٔ مـدرج تابعی بین دو صفحه را تحت بارهای عمودی، برشی و تغییرشکل صفحه‌ای مورد بررسی قرار دادند. ایشـان از روش ماتریس انتقال و تبدیل انتگـرال فوریـه اسـتفاده کردند و ضرایب شدت تـنش تـرک را از حـل عـددی معادلات به‌دست آوردنـد. دگ [5,6]، ضـرایب شـدت تـنش را در صـفحات مـدرج تـابعی همسـانگرد و ناهمسانگرد تحت بارگـذاری حرارتـی محاسـبه نمـود [5,6]. وی از روشـی مبتنـی بـر انتگـرال دامنـه معـادل (Equivalent Domain Integral) برای توسـعهٔ تحلیـل آسیب مود یک در مواد مدرج تابعی ناهمسانگرد تحت تأثیر تنش‌های حرارتی اسـتفاده کـرد. او هـم‌چنـین در تحقیقی دیگر به توسعهٔ روش انتگرال J بـرای محاسـبهٔ پارامترهای نـوک تـرک در مـواد مـدرج تـابعی تحـت تنش‌های حرارتـی پرداخـت. نظـری و همکـاران [7]، چقرمگی شکسـت در فـولاد مـدرج تـابعی را بررسـی کردند. ایشان فولاد مدرج تـابعی را از ذوب الکتریکـی الکترودها تولید کردند و نشان دادند که در ساختار جدا شـدن تـرک، چقرمگـی شکسـت بـه آرایـش قطعـات الکترود اولیـه و فـاز آن بسـتگی دارد. آنهـا هـم‌چنـین دریافتند که در ساختار توقف ترک، چقرمگی شکسـت به موقعیت نوک ترک و فاصلهٔ آن نسبت به لایهٔ میـانی بینیت یا مارتنزیت وابسته است. ترشیزیان و کارگرنوین [8]، تحلیل مکانیزم‌هـای شکسـت مـود ترکیبـی دارای ترک با جهت‌گیری دلخـواه را در دو جهـت صـفحه‌ای با مواد مدرج تابعی بررسی نمودند. ایشان بااسـتفاده از تبدیل انتگـرال فوریـه و روش معادلـهٔ انتگـرال تکـین مسئله را حل کردند و ضـرایب تمرکـز تـنش در نـوک ترک تحت بارهای مکانیکی را محاسبه نمودند و اثرات جهت‌گیری ترک بر مقدار ضرایب شدت تنش در مـود یک و دو شکست را تعیین کردند.

در این پژوهش ابتدا، تعـدادی از معیارهـای رشـد ترک معرفی و در مورد پیش‌بینی زاویهٔ شـروع و رشـد ترک هر کدام بحث خواهد شد. سپس، انتگرال تعـاملی

برای محاسبهٔ ضرایب شدت تنش در مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در ادامه مثال‌های عددی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج عددی با نتایج تجربی موجود در مقالات مقایسه می‌شود و صحت رفتار ماده مدرج تابعی تأیید می‌گردد. هم‌چنین ضرایب شدت تنش بااستفاده از روش انتگرال تعاملی M-integral محاسبه می‌شود؛ زاویهٔ آغاز ترک توسط معیارهای مختلف بررسی می‌گردد و توانایی پیش‌بینی معیارهای مختلف و معیار مناسب مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. به‌منظور صحت‌سنجی رشد ترک، مسیرهای رشد ترک توسط معیار مناسب محاسبه، با نتایج تجربی موجود در پژوهش‌ها مقایسه می‌شود و دقت آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

معیارهای شکست

مطابق شکل (۱)، در مواد مدرج تابعی میدان تنش برای ترک به‌صورت الاستیک خطی درنظر گرفته می‌شود و مطابق روابط زیر قابل بیان است [9]:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[K_I\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2}K_{II}\left(\sin\theta - 2\tan\frac{\theta}{2}\right)] \quad (۱)$$

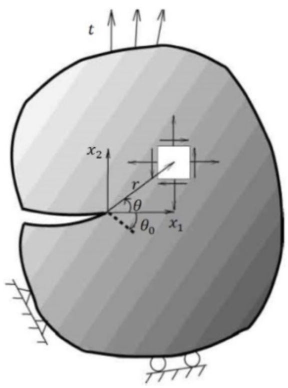
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[K_I\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{II}\sin\theta] \quad (۲)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}[K_I\sin\theta + \mathbf{K_{II}(3\cos\theta - 1)} \quad (۳)$$

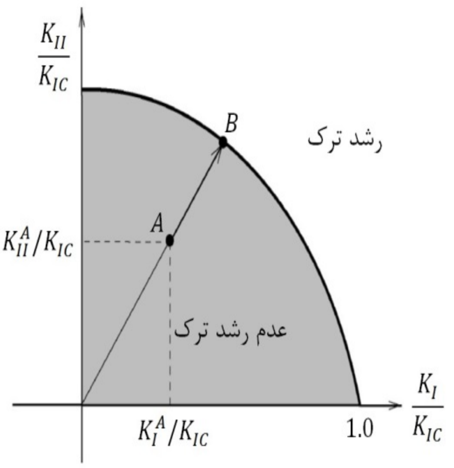
K_I و K_{II} به مود اول و دوم ضرایب شدت تنش اشاره می‌کند. نکتهٔ مهم در مورد میدان‌های تنش در مواد مدرج تابعی این است که چون این میدان‌ها در نزدیک نوک ترک بررسی می‌گردند، به‌علت کوچک بودن ناحیهٔ مورد بررسی، در این ناحیه رفتاری همانند مواد همگن از خود نشان می‌دهند، حالت تکین در این مواد، هم‌مرتبه با مواد همگن و برابر $(r^{-1/2})$ است و توابع زاویه‌ای نیز همانند مواد همگن است [10, 11]. این همگن بودن محلی امکان استفاده از معیارهای شکست مواد همگن برای مواد مدرج تابعی را با این تفاوت که شرایط در نزدیکی نوک ترک بررسی می‌گردد، فراهم نموده است.

شکل (۲) پارامترهای شکست مود اول، دوم و چقرمگی شکست K_{IC} (Fracture Toughness) را نشان می‌دهد. اگر نیروی رانش ترک (Crack Driving Force) برای میدان‌های نوک ترک به حد کافی بزرگ باشد که به مرز منحنی برسد، ترک رشد خواهد نمود. منحنی شکست از طریق روش‌های مختلفی مانند تجربی، تحلیلی یا ترکیبی از هر دو به‌دست می‌آید.

مواد مدرج تابعی در نزدیک نوک ترک رفتاری مانند مواد همگن از خود نشان می‌دهند. در این پژوهش، رشد ترک از طریق معیارهای شکست مواد همگن به‌صورت محلی مانند معیار بیشینه تنش مماسی (Maximum Tangential Stress)، بیشینه نرخ رهایش انرژی (Maximum Energy Release Rate) و کمینه چگالی انرژی کرنشی (Minimum Strain Energy Density) تعیین می‌گردد. در ادامه این معیارها به‌صورت مختصر توضیح داده می‌شوند.



شکل ۱ شرایط مرزی و بارگذاری در یک مادهٔ مدرج تابعی دلخواه دارای ترک با زاویهٔ شروع رشد ترک θ_0 [9]



شکل ۲ منحنی شکست شامل مود اول، دوم و چقرمگی شکست (پارامترها نسبت به K_{IC} بی‌بعد شده‌اند)

معیار بیشینه تنش مماسی. اردوغان و سیه [12] برای اولین بار معیار بیشینه تنش مماسی را پیشنهاد دادند. براساس این معیار، ترک در جهتی که بیشینه تنش مماسی $\sigma_{\theta\theta}$ اتفاق می‌افتد رشد می‌کند و در این جهت، تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ برابر صفر خواهد بود. هم‌چنین زاویهٔ آغاز رشد ترک θ_0 از طریق معادلات زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}=0\,,\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}<0\ \rightarrow\ \theta=\theta_0 \qquad (۴)$$

در معادلهٔ فوق، قسمت اول مربوط به بیشینه یا کمینه بودن و قسمت دوم مربوط به بیشینه بودن است. با جایگزین کردن تنش در معادلهٔ (۴) شرایط آغاز ترک به‌صورت معادلهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left[K_I\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\frac{3}{2}K_{II}\sin\theta_0\right]=K_{IC}(x) \qquad (۵)$$

معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی. هوشین و همکاران [13]، معیار بیشینه نرخ رهایی انرژی را برای مواد همگن ارائه دادند. مطابق معیار پیشنهادی ایشان، ترک در جهتی رشد خواهد کرد که نرخ رهایش انرژی بیشینه گردد و زمانی رشد آن آغاز خواهد شد که مقدار بیشینه نرخ رهایش انرژی به یک مقدار بحرانی برسد:

$$\frac{\partial\mathcal{G}(\theta)}{\partial\theta}=0\,,\frac{\partial^2\mathcal{G}(\theta)}{\partial\theta^2}<0\ \rightarrow\ \theta=\theta_0 \qquad (۶)$$

ایشان یک حل الاستیک برای ترک اصلی مستقیم و یک شاخه ترک که با زاویهٔ دلخواه گسترش می‌یافت، به‌دست آوردند و نرخ رهایش انرژی را به‌صورت زیر بیان نمودند:

$$\mathcal{G}(\theta)=\frac{4}{E_{tip}^*}\left(\frac{1}{3+\cos^2\theta}\right)^2\left(\frac{1-\frac{\pi}{\theta}}{1+\frac{\pi}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{\pi}}\times\left[(1+3\cos^2\theta)\,K_I^2+8\sin\theta\cos\theta\,K_I\,K_{II}+(9-5\cos^2\theta)\,K_{II}^2\right] \qquad (۷)$$

لذا زاویهٔ آغاز ترک از طریق معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\mathcal{G}(\theta)}{\partial\theta}=0\,,\frac{\partial^2\mathcal{G}(\theta)}{\partial\theta^2}<0\ \rightarrow\ \theta=\theta_0 \qquad (۸)$$

اکنون باتوجه به زاویهٔ آغاز ترک حاصل، شرایط آغاز ترک به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{G}(\theta_0)=\mathcal{G}_C(x) \qquad (۹)$$

در معادلهٔ فوق، $\mathcal{G}_C(x)$ نرخ رهایش انرژی بحرانی است که از طریق رابطهٔ (۱۰) قابل محاسبه است:

$$\mathcal{G}_C(x)=\frac{K_{IC}^2(x)}{E_{tip}^*} \qquad (۱۰)$$

معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی. سیه [14] معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی را برای مواد همگن ارائه نمود. این معیار پیش‌بینی می‌کند، ترک در جهتی رشد

خواهد کرد که S ضریب چگالی انرژی کرنشی کمینه شود. بنابراین زاویۀ آغاز ترک θ_0 به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = 0\,, \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta^2} > 0 \ \rightarrow\ \theta = \theta_0 \qquad (۱۱)$$

اکنون با تعیین زاویۀ آغاز ترک، شرایط آغاز ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S(\theta_0) = S_C(x) \qquad (۱۲)$$

در رابطۀ فوق، $S_C(x)$ ضریب چگالی انرژی کرنشی است و به‌صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$S_C(x) = \frac{\kappa_{tip} - 1}{8\,\mu_{tip}}\, K_{IC}^2(x) \qquad (۱۳)$$

که μ_{tip} مدول برشی در نوک ترک است.

روش انتگرال تعاملی (Interaction Integral)

روش انتگرال تعاملی (M-integral) روشی دقیق جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد مدرج تابعی است [9, 15, 16]. این روش، برای محاسبۀ ضرایب شدت تنش در مود ترکیبی از میدان‌هایی کمکی مانند جابه‌جایی (u^{aux})، کرنش (ε^{aux}) و تنش (σ^{aux}) مناسب استفاده می‌کند. انتخاب‌های متنوعی برای میدان‌های کمکی در مواد مدرج تابعی وجود دارد. در این تحقیق مطابق مرجع [15] از میدان تنش غیرتعادلی و یک راه‌حل غیرتعادلی که از توسعۀ میدان‌های جابه‌جایی و کرنش مواد همگن حاصل گردیده استفاده می‌شود.

معادلۀ ساختاری ماده به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\sigma^{aux} = C(x)\,\varepsilon^{aux} \qquad (۱۴)$$

که $C(x)$ تانسور سفتی است. میدان‌های جابه‌جایی، تنش و کرنش به‌صورت زیر انتخاب می‌گردند:

$$u^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,g^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,g^{II}(\theta) \qquad (۱۵)$$

$$u^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,g^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,g^{II}(\theta) \qquad (۱۶)$$

$$\varepsilon^{aux} = (\mathrm{sym}\ \nabla)\,u^{aux} \qquad (۱۷)$$

K_I^{aux} و K_{II}^{aux} به‌ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم کمکی و μ_{tip} مدول برشی در نوک ترک است. توابع $g^I(\theta)$ ، $g^{II}(\theta)$ و ضرایب آن در مراجع [9,15] موجود می‌باشد. انتگرال تعاملی بااستفاده از انتگرال مستقل از مسیر J که توسط رایس (Rice) [17] ارائه شده، برای مواد مدرج تابعی دارای ترک در حالت الاستیک و دو حالت واقعی و کمکی به‌دست می‌آید و به‌صورت رابطۀ (۱۸) نوشته می‌شود [18]:

$$\mathrm{M} = \int_A \{\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}\delta_{1j}\}q_{,j}\mathrm{d}A + \int_A \{\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\epsilon_{ij}^{aux}\}q\mathrm{d}A \qquad (۱۸)$$

ارتباط بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش مود اول و دوم به‌صورت معادلۀ (۱۹) می‌باشد:

$$J_{local} = (K_I^2 + K_{II}^2)/E_{tip}^* \qquad (۱۹)$$

که در حالت تنش صفحه‌ای $E_{tip}^* = E_{tip}$ و در حالت کرنش صفحه‌ای $E_{tip}^* = E_{tip}/\left(1 - \upsilon_{tip}^*\right)$ خواهد بود. برای دو میدان واقعی (u, ε, σ) و کمکی $(u^{aux}, \varepsilon^{aux}, \sigma^{aux})$ می‌توان نوشت [19]:

$$J_{local}^{s}=\frac{(K_I+K_I^{aux})^2+(K_{II}+K_{II}^{aux})^2}{E_{tip}^{*}}=J_{local}+J_{local}^{aux}+M_{local} \quad (۲۰)$$

در معادلهٔ اخیر، J_{local}^{aux} از طریق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$J_{local}^{aux}=[(K_I^{aux})^2+(K_{II}^{aux})^2]/E_{tip}^{*} \quad (۲۱)$$

M_{local} نیز از طریق معادلهٔ (۲۲) به‌دست می‌آید:

$$M_{local}=2(K_I K_I^{aux}+K_{II}K_{II}^{aux})/E_{tip}^{*} \quad (۲۲)$$

درنتیجه ضرایب شدت تنش از طریق روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$K_I=M_{local}^{(1)}E_{tip}^{*}/2 \quad (K_I^{aux}=1.0\,, K_{II}^{aux}=0.0) \quad (۲۳)$$

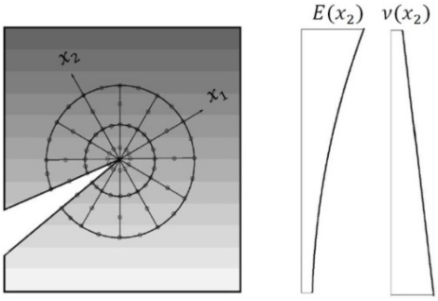
$$K_{II}=M_{local}^{(2)}E_{tip}^{*}/2 \quad (K_I^{aux}=0.0\,, K_{II}^{aux}=1.0) \quad (۲۴)$$

ارتباط بین معادلات (۲۳ و ۲۴) همانند مواد همگن است، با این تفاوت که برای مواد مدرج تابعی، مقادیر مورد نظر در نوک ترک ارزیابی می‌شوند.

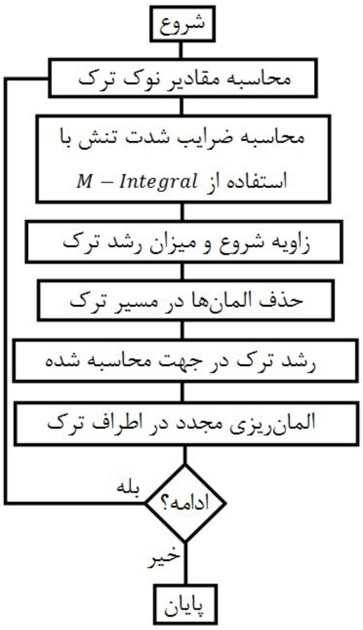
شبیه‌سازی اجزای محدود

برای انجام شبیه‌سازی آغاز و رشد ترک از نرم‌افزار فرنک دوبعدی (Fracture Analysis Software 2 Dimension- Franc2D) که توسط دانشگاه کرنل (Cornell) ارائه و توسعه داده شده است، استفاده می‌گردد. در این نرم‌افزار امکان تعریف المان‌های تابعی برای تعریف مواد ناهمگن وجود دارد.

مطابق شکل (۳)، این نرم‌افزار از المان‌های مثلثی که دارای شش گره هستند برای خنثی کردن اثر تکینی نوک ترک که از مرتبهٔ $O(r^{-1/2})$ است، استفاده می‌کند. نرم‌افزار فوق همچنین برای پیش‌بینی زاویهٔ شروع و رشد ترک از چند گام استفاده می‌کند که الگوریتم حل آن در شکل (۴) نشان داده شده است.



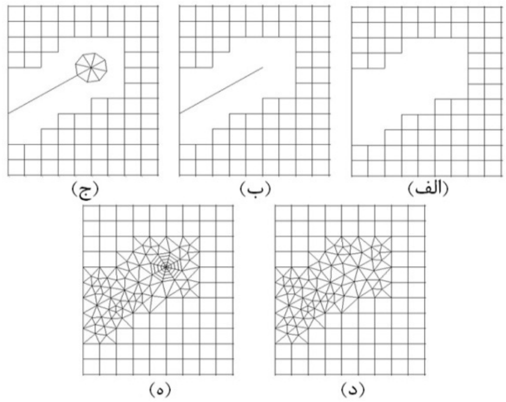
شکل ۳ المان‌های نوک ترک در مواد مدرج تابعی



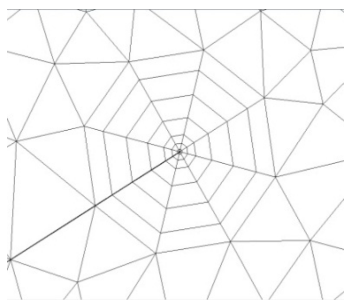
شکل ۴ الگوریتم حل جهت رشد ترک

تغییر کلیه خواص مانند ضریب الاستیک، ضریب پواسون، چقرمگی شکست، ضخامت (در صورت نیاز) و غیره به‌صورت توابعی خطی تعریف می‌گردد. ابتدا هندسهٔ مسئله ایجاد می‌شود و پس از المان‌بندی، انتساب ماده به‌صورت تابعی انجام می‌شود. با اعمال شرایط مرزی، بارگذاری و محل ترک، یک تحلیل خطی بر روی هندسهٔ دارای ترک انجام می‌گردد و

ضرایب شدت تنش به روش انتگرال تعاملی محاسبه می‌شوند. از ضرایب شدت تنش برای محاسبهٔ جهت رشد ترک در هر یک از معیارهای بیشینه تنش مماسی، بیشینه نرخ رهایش انرژی و کمینه چگالی انرژی کرنشی، استفاده می‌گردد. به‌علاوه از چقرمگی شکست نمونه و ضرایب شدت تنش، برای تعیین شرایط رشد ترک استفاده می‌شود. براساس میزان رشد ترک تعریف شده و زاویهٔ θ_0، ابتدا موقعیت نوک ترک جدید مشخص می‌گردد. سپس المان‌ها از اطراف آن حذف می‌شود و ترک رشد داده می‌شود. در ادامه، المان‌های جدید در اطراف نوک ترک ریخته میرشود و المان‌های حذف‌شده نیز مطابق با المان‌های نوک ترک تجدید می‌گردند. المان‌بندی مجدد، خواص المان‌های اصلی مانند خواص تابعی را حفظ می‌کند. شکل (۵) نمایی از المان‌بندی مجدد و شکل (۶) تصویری از المان‌های نوک ترک را نشان می‌دهد.



شکل ۵ مراحل المان‌بندی مجدد

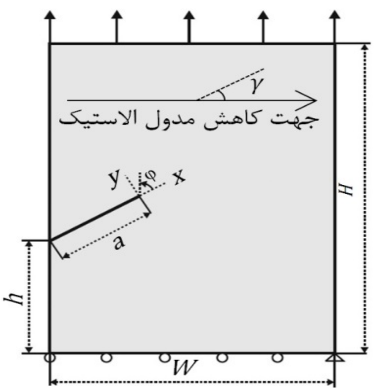


شکل ۶ المان‌های نوک ترک

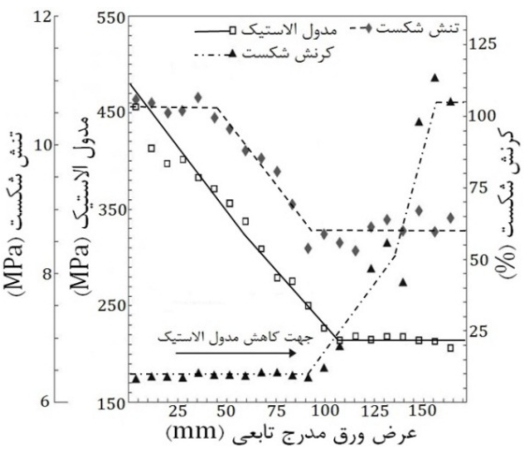
هندسه از طریق المان‌های ایزوپارامتریک (Isoparametric) تابعی تعریف می‌گردد. مطابق شکل (۵-هـ)، المان‌های مورد استفاده شامل المان‌های مثلثی شش‌گرهی (T6qp، که گره‌های میانی در فاصلهٔ یک‌چهارم طول ضلع و نزدیک نوک ترک هستند) برای نوک ترک، المان‌های هشت‌گرهی (Q8) برای نواحی دورتر و المان‌های مثلثی منظم (T6) برای فضای بین المان‌های نوک ترک و هشت‌گرهی می‌باشد.

در این بخش سه مثال در حالت‌های مختلف مورد بررسی بوده‌اند و پس از انجام شبیه‌سازی‌های اجزای محدود، نتایج عددی حاصل با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] مورد مقایسه قرار می‌گیرد. ایشان ابتدا، ورقه‌های نازکی از یک پلیمر به ابعاد۳۰۰ و ۱۵۰ میلی‌متر را برای مدت زمان متغیر ۵ تا ۳۰۰ ساعت تحت تابش قرار دادند. در اثر تابش، خواص مکانیکی پلیمر از سمتی به سمت دیگر و از حالت نرمی به تردی تغییر نمود. سپس، ورقه‌ها را در حالت‌های مختلف بریدند، تحت کشش خالص قرار دادند و رشد ترک را در آنها بررسی کردند.

صفحهٔ مدرج تابعی با ترک مایل و تغییر خواص در جهت عرضی. مطابق شکل (۷)، یک صفحهٔ مدرج تابعی نازک دارای ترک مایل که تغییر خواص آن در راستای عرضی است، درنظر گرفته می‌شود. تغییرات مدول الاستیک، تنش و کرنش شکست صفحه در شکل (۸) نشان داده شده است. هم‌چنین ابعاد هندسی صفحه و جهت‌گیری ترک در جدول (۱) بیان شده است. برای یافتن بهتر موقعیت مدل نسبت به تغییر خواص، موقعیت نوک ترک نسبت به لبهٔ سخت‌تر نیز در جدول ارائه گردیده است. ضریب پواسون و ضخامت در همه‌جا یکسان و به‌ترتیب برابر با ۰/۴۵ و ۰/۴۰۶ میلی‌متر می‌باشد. جابه‌جایی یکنواخت به لبهٔ بالایی صفحه و در راستای y اعمال می‌گردد؛ لبهٔ پایینی در جهت عمودی مقید می‌شود و به‌منظور جلوگیری از حرکت صلب، جابه‌جایی افقی گوشه پایین سمت راست صفحه نیز محدود می‌شود.



شکل ۷ هندسه و شرایط مرزی صفحهٔ مدرج تابعی با ترک مایل
و تغییر خواص در جهت عرضی



شکل ۸ خواص مکانیکی مدل

جدول ۱ ابعاد هندسی و جهت‌گیری ترک

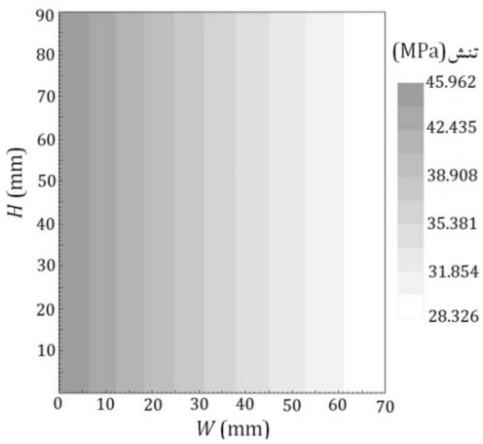
ابعاد هندسی مدل						
H (mm)	W (mm)	h (mm)	a (mm)	موقعیت نوک ترک (mm)	φ (rad)	γ (rad)
۹۰	۷۰	۴۵	۲۶	۴۳	π/۳	−π/۶

رفتار ماده به‌صورت الاستیک خطی مـدل گردیـده است و به‌منظور صحت‌سنجی رفتار ماده مدرج تـابعی، ابتدا قطعهٔ سالم و بدون ترک شـبیه‌سـازی مـی‌شـود و نتایج عددی اعتبارسنجی می‌گردند. برای انجام این کار ابتدا جابه‌جایی یکنواخت ۱۰ میلی‌متر در راستای y بـه لبهٔ بالایی صفحه اعمال می‌شود و توزیع تـنش صـفحه مطابق شکل (۹) حاصل می‌گردد. سپس، مقادیر تنش با استفاده از رابطهٔ $\sigma_{yy}W(1-\upsilon^2)/E_1V_0$ که E_1 مـدول الاستیک در لبه سمت چپ است، بـی‌بعـد مـی‌شـود و مطابق شکل (۱۰) با نتایج تجربی اردوغان و سـیه [12] مقایسه می‌گردد. مطابق شکل فوق، حداکثر خطـا ۰/۳۷ درصد است که این میـزان نـاچیز خطـا، بیـانگر دقـت بالای شبیه‌سازی‌ها بوده و نتایج عددی را کـاملاً تأییـد می‌نماید.

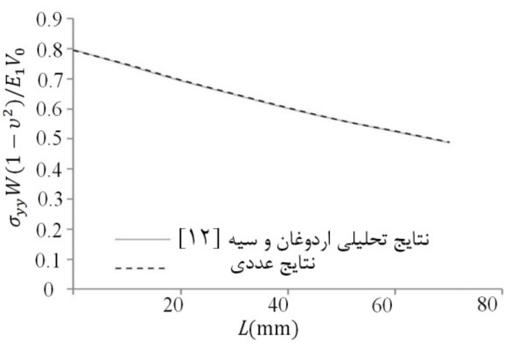
برای ارزیابی و مقایسهٔ دقت معیارهای بیشینه تنش مماسی، بیشینه نرخ رهایش انرژی و کمینه چگالی انرژی کرنشی، مطابق شکل (۷) نمونهٔ دارای ترک شبیه‌سازی می‌گردد، ضرایب شدت تنش و زاویهٔ آغاز ترک به‌دست آمده با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال (Oral) و همکاران [21] مقایسه می‌شود. جدول (۲) این مقایسه را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که زاویهٔ شروع رشد ترک (α)، نسبت به راستای اولیه ترک سنجیده می‌گردد.

همان‌گونه که جدول (۲) بیان می‌نماید، معیارهای بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی نتایج دقیقی را پیش‌بینی می‌کنند ولی پیش‌بینی معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی، بیشتر به نتایج تجربی، نزدیک‌تر است و درنتیجه معیار دقیق‌تری است.

نتایج معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی دارای خطای زیادی است و علت آن این است که تأثیر عبارات غیرمنفرد (Non-Singular) مانند تنش T (T-Stress) در مواد پلیمری و هم‌چنین نحوهٔ بارگذاری، قابل ملاحظه است و این معیار به پارامترهای فوق وابسته است. تنش T عبارت غیر منفردی است که معمولاً از آن چشم‌پوشی می‌گردد و اساساً در مود ترکیبی تأثیر بیشتری دارد [22]. در معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی، تنش T به مود ترکیبی (Mixed Mode) که توسط ψ و به‌صورت $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)$ تعریف می‌گردد وابسته است. هرچه مقدار ψ به صفر و شرایط به مود اول شکست نزدیک‌تر باشد، این معیار نتایج دقیق‌تری را نشان می‌دهد. در مواردی به‌منظور بهبود دقت این معیار، تأثیر تنش T نیز به این معیار اضافه می‌گردد که باعث بهبود نتایج معیار فوق در این مواد می‌شود [23,24].



شکل ۹ توزیع تنش در آزمایش کشش قطعهٔ سالم برای صحت‌سنجی رفتار ماده

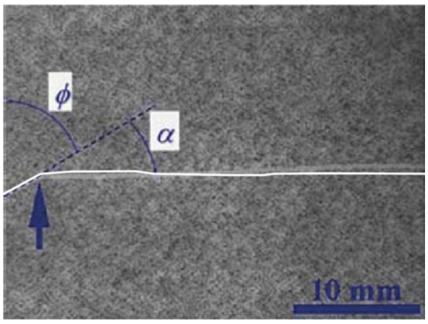


شکل ۱۰ مقایسهٔ مقادیر تنش بی‌بعد شده با نتایج تجربی اردوغان و سیه [12]

جدول ۲ مقایسهٔ ضرایب شدت تنش و زاویهٔ آغاز ترک با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال و همکاران [21]

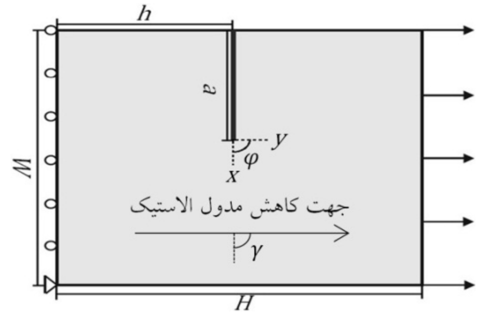
نتایج	$K_I(MPa\sqrt{m})$	$K_{II}(MPa\sqrt{m})$	زاویهٔ آغاز ترک	خطا (٪)
آبانتو و لامبروس [20]	۰/۷۵۵	۰/۱۷۹	$-۲۸ \pm ۱/۵$	
اورال و همکاران [21]	۰/۷۲۲	۰/۲۰۴		
شبیه‌سازی	۰/۷۳۵	۰/۲۲۵		
$\sigma_{\theta\theta_{Max}}$	۰/۷۳۵	۰/۲۲۵	−۲۹/۵۳	۵/۴۶
$\mathcal{G}(\theta)_{Max}$	۰/۷۳۵	۰/۲۲۵	۱۶/۶۱	۱۵۹/۳۲
$S(\theta)_{Min}$	۰/۷۳۵	۰/۲۲۵	−۲۸/۰۴	۰/۱۴

به‌منظور بررسی مسیر رشد ترک، نتایج پیش‌بینی معیار دقیق‌تر یعنی معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی درنظر گرفته میرشود و با نتایج تجربی مقایسه می‌گردد. شکل (۱۱) مقایسهٔ نتایج حاصل از معیار فوق را با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] آشکار می‌کند. مطابق شکل نتایج رشد ترک با دقت مناسبی از نتایج تجربی تبعیت می‌نماید. برای مقایسهٔ راحت‌تر، مسیر رشد ترک پیش‌بینی‌شده با رنگ سفید نمایش داده شده است.



شکل ۱۱ مقایسهٔ رشد ترک معیار S_{Min} با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20]

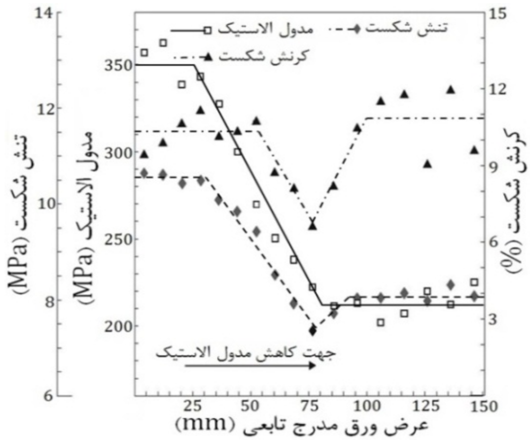
صفحهٔ مدرج تابعی با ترک افقی و تغییر خــواص در جهت عمود بر ترک. مطابق شکل (۱۲) صفحهٔ مدرج تابعی با ترک افقی مدل می‌شود و خواص بــه گونــه‌ای تعریف می‌گردد که با راستای ترک زاویهٔ قائمه بسازد. ابعاد هندسی، زوایا و جهت‌گیری ترک در جـدول (۳) ارائه شده است. هم‌چنین شکل (۱۳) خواص مکـانیکی و نحوهٔ قرارگیری مدل نسبت به خواص ماده را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۲ هندسه و شرایط مرزی صفحهٔ مدرج تابعی با ترک افقی و تغییر خواص در جهت عمود بر ترک

جدول ۳ ابعاد هندسی و جهت‌گیری ترک

ابعاد هندسی مدل						
H (mm)	W (mm)	h (mm)	a (mm)	موقعیت نوک ترک (mm)	φ (rad)	γ (rad)
۷۵	۷۰	۳۲/۵	۳۰	۵۲	π/۲	π/۲



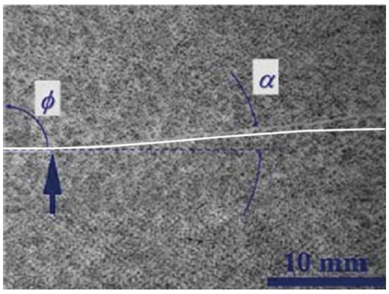
شکل ۱۳ خواص مکانیکی مدل

جدول ۴ مقایسهٔ ضرایب شدت تنش و زاویهٔ آغاز ترک با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال و همکاران [21]

نتایج	$K_I(\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}})$	$K_{II}(\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}})$	زاویهٔ آغاز ترک	انحراف (درجه)
آبانتو و لامبروس [20]	۰/۵۵۴	۰/۰۳۹	۰ ± ۱/۵	
اورال و همکاران [21]	۰/۵۵۱	−۰/۰۲۲		
شبیه‌سازی	۰/۵۶۰	−۰/۰۰۷		
$\sigma_{\theta\theta\mathrm{Max}}$	۰/۵۶۰	−۰/۰۰۷	۱/۴۳	۱/۴۳
$\mathcal{G}(\theta)_{\mathrm{Max}}$	۰/۵۶۰	−۰/۰۰۷	−۰/۷۵	−۰/۷۵
$\mathrm{S}(\theta)_{\mathrm{Min}}$	۰/۵۶۰	−۰/۰۰۷	۱/۴۳	۱/۴۳

شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده، ضرایب شدت تنش و زاویهٔ شروع ترک (α) توسط معیارهای مختلف محاسبه می‌گردد. جدول (۴) مقایسهٔ نتایج عددی حاصل را با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال و همکاران [21] نمایش می‌دهد. مطابق این جدول، معیارهای بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی نتایج یکسانی را پیش‌بینی می‌نمایند. لازم به ذکر است که معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی نتایج دقیقی را پیش‌بینی می‌کند. علت این است که چون در مسئلهٔ فوق تغییر خواص عمود بر راستای ترک می‌باشد و بارگذاری نیز در راستای تغییر خواص و عمود بر ترک می‌باشد، در نوک ترک مود دوم کمتر تحریک می‌شود و این عامل باعث می‌شود که جسم تحت مود اول شکست قرار بگیرد. مقادیر کوچک و نزدیک به صفر K_{II}، دلیل فوق را تأیید می‌کند. در واقع زمانی که جسم تحت مود اول شکست باشد، مقدار تنش T تأثیر کمتری دارد و می‌توان از معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی نیز استفاده کرد [22].

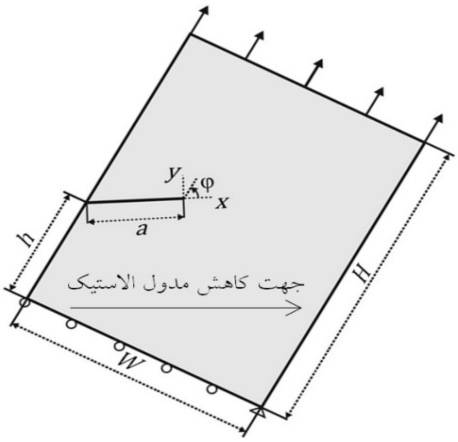
در این مثال چون زاویهٔ آغاز ترک ارائه‌شده توسط آبانتو و لامبروس برابر صفر می‌باشد، برای مقایسه به‌جای درصد خطا از انحراف استفاده گردید. شکل (۱۴) مسیر ترک پیش‌بینی‌شده توسط معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی و مقایسهٔ آن با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] را نشان می‌دهد. همان‌گونه که شکل آشکار می نماید، نتایج عددی و تجربی از مطابقت خوبی برخوردار می‌باشند.



شکل ۱۴ مقایسهٔ رشد ترک معیار S_{Min} با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20]

صفحهٔ مدرج تابعی با ترک مایل و تغییر خواص در جهت ترک. صفحهٔ مدرج تابعی با ترک مایل شبیه‌سازی شده در مثال اول مجدداً درنظر گرفته می‌شود. در این مسئله به‌جای تغییر خواص در جهت عرضی، خواص در راستای ترک تغییر داده می‌شود. ابعاد هندسی، شرایط مرزی و جهت‌گیری ترک در شکل (۱۵) و جدول (۵) آورده شده است. هم‌چنین تغییر خواص ماده و نحوهٔ قرارگیری مدل نسبت به خواص در شکل (۱۶) مشخص گردیده است.

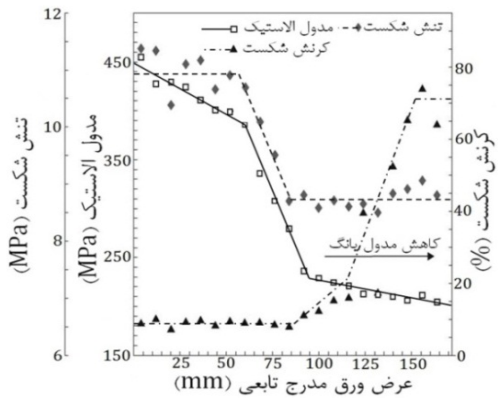
پس از انجام شبیه‌سازی‌های عددی، ضرایب شدت تنش و زاویهٔ شروع ترک (α) توسط معیارهای مختلف محاسبه می‌شود. جدول (۶) مقایسهٔ نتایج عددی حاصل را با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال و همکاران [21] نمایش می‌دهد. همانند مثال‌های قبلی، در این مثال نیز معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی نتایج دقیق‌تری را نسبت به دو معیار دیگر نشان می‌دهد. مسیر ترک پیش‌بینی شده توسط این معیار و مقایسهٔ آن با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] نیز در شکل (۱۷) آورده شده است.



شکل ۱۵ هندسه و شرایط مرزی صفحهٔ مدرج تابعی با ترک مایل و تغییر خواص در جهت ترک

جدول ۵ ابعاد هندسی و جهت‌گیری ترک

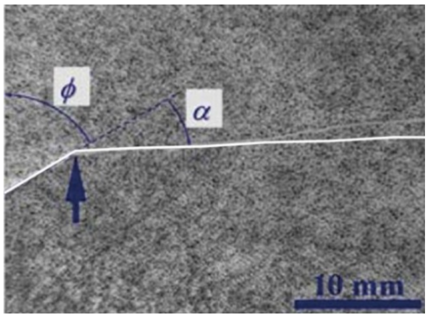
ابعاد هندسی مدل						
γ (rad)	φ (rad)	موقعیت نوک ترک (mm)	a (mm)	h (mm)	W (mm)	H (mm)
صفر	π/۳	۵۷	۲۵	۴۵	۷۰	۹۰



شکل ۱۶ خواص مکانیکی مدل

جدول ۶ مقایسهٔ ضرایب شدت تنش و زاویهٔ آغاز ترک با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20] و اورال و همکاران [21]

نتایج	$K_I(\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}})$	$K_{II}(\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}})$	زاویهٔ آغاز ترک	خطا (٪)
آبانتو و لامبروس [20]	۰/۹۶۹	۰/۲۲۴	$-۱۹ \pm ۱/۵$	
اورال و همکاران [21]	۰/۸۷۸	۰/۲۳۰		
شبیه‌سازی	۰/۹۱۵	۰/۲۱۰		
$\sigma_{\theta\theta Max}$	۰/۹۱۵	۰/۲۱۰	−۲۳/۶۵	۲۴/۴۷
$\mathcal{G}(\theta)_{Max}$	۰/۹۱۵	۰/۲۱۰	۱۲/۹۹	۱۶۸/۳۶
$S(\theta)_{Min}$	۰/۹۱۵	۰/۲۱۰	−۲۲/۷۴	۱۹/۶۸



شکل ۱۷ مقایسهٔ رشد ترک معیار S_{Min} با نتایج تجربی آبانتو و لامبروس [20]

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش، به بررسی رفتار شکست در یک پلیمر مدرج تابعی پرداخته شد و ابتدا معیارهای مختلفی مانند معیار بیشینه تنش مماسی، بیشینه نرخ رهایش انرژی و کمینه چگالی انرژی کرنشی مورد ارزیابی قرار گرفت. سپس، با به‌کارگیری روش انتگرال تعاملی (انتگرال M) که روشی دقیق برای تعیین ضرایب شدت تنش در مواد مدرج تابعی است، الگوریتم محاسبهٔ ضرایب شدت تنش و تعیین مسیر رشد ترک، ارائه شد. در ادامه، رفتار مادهٔ مدرج تابعی در یک صفحهٔ فاقد ترک مطالعه و درستی رفتار ماده صحت‌سنجی گردید. هم‌چنین بااستفاده از روش انتگرال تعاملی، رفتار مادهٔ مدرج تابعی بررسی شد و ضرایب شدت تنش برای حالت‌های مختلف جهت‌گیری ترک و خواص مکانیکی ماده محاسبه گردید. بااستفاده از نتایج حاصل، زاویهٔ آغاز ترک از معیارهای مختلف به‌دست آمده و ارزیابی گردید. نتایج آشکار کرد که پیش‌بینی‌های معیارهای بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی به‌هم نزدیک می‌باشد ولی معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی از دقت بهتری برخوردار است. علت دقت کمتر معیار بیشینه نرخ رهایش انرژی نیز این است که پارامترهای غیرمنفرد مانند تنش T تأثیرگذار است، ولی اثر آن لحاظ نگردیده است. درواقع هرچه مقدار ψ به صفر و شرایط به مود اول شکست نزدیک‌تر باشد، این معیار نتایج دقیق‌تری را نشان می‌دهد. در آخر، مسیر رشد ترک محاسبه شده با نتایج تجربی موجود در پژوهش‌ها مقایسه گردیده و دقت معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی نشان داده شد.

فهرست علائم

C	تانسور سفتی (MPa)
E	مدول الاستیک (MPa)
$\mathcal{G}$	نرخ رهایش انرژی ($\mathrm{MPa \cdot m}$)
K	ضریب شدت تنش ($\mathrm{MPa \cdot m^{\frac{1}{2}}}$)
r	شعاع (m)
u	جابه‌جایی (m)
W	کار لازم برای بستن ترک بر واحد ضخامت ($\mathrm{J \cdot m^{-1}}$)

علائم یونانی

ε	کرنش
θ	زاویه (degree)
μ	مدول الاستیسیته برشی (MPa)
σ	تنش (MPa)

بالانویس‌ها

aux	کمکی

زیرنویس‌ها

0	مقدار در لحظهٔ اولیه
C	مقدار نهایی در لحظهٔ شکست
I	مود اول شکست
IC	مقادیر در لحظهٔ شکست و مود اول
II	مود دوم شکست
rr	در راستای شعاعی
$r\theta$	در راستای برشی
tip	نوک ترک
$\theta\theta$	در راستای مماسی

مراجع

1. Hirai, T., "Functionally gradient materials and nanocomposites", *Proceedings of the Second International Symposium on Functionally Gradient Materials*, San Francisco, CA, November 1-4, Vol. 34 of Ceramic Transactions, pp. 11-20, (1993).
2. Jin, Z.H. and Noda, N., "Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 61, pp. 738-740, (1994).
3. Erdogan, F. and Wu, B.H., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 449–456, (1997).
4. Huang, G.Y., Wang, Y.S. and Yu, S.W., "Fracture analysis of a functionally graded interfacial zone under plane deformation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 731–743, (2004).
5. Dag, S., "Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, pp. 2802–2828, (2006).
6. Dag, S., "Mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses: a new approach using J_k-integral", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 30, pp. 269–296, (2007).
7. Nazari, A., Mohandesi, J.A. and Riahi, R., "Fracture toughness of functionally graded steels", *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 21, pp. 558–563, (2012).
8. Torshizian, M.R. and Kargarnovin, M.H., "The mixed-mode fracture mechanics analysis of an embedded arbitrary oriented crack in a two-dimensional functionally graded material plate", *International Journal of Fracture*, Vol. 84, pp. 625–637, (2014).
9. Kim, J.H. and Paulino, G.H., "The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: Evaluation of stress intensity factors", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3967–4001, (2003).
10. Hirano, T., Teraki, J. and Yamada, T., "On the design of functionally gradient materials", *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, pp. 5-10, (1990).
11. Kawasaki, A. and Watanabe, R., "Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded biomaterial", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 1713–1728, (2002).
12. Erdogan, F. and Sih, G.C., "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 519–527, (1963).
13. Hussain, M.A., Pu, S.L. and Underwood, J., "Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II", *Fracture Analysis*, ASTM STP 560, pp. 2–28, (1993).
14. Sih, G.C., "Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 305–321, (1974).
15. Kim, J.H. and Paulino, G.H., "Consistent formulations of the interaction integral method for fracture of functionally graded materials", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 72, No. 3, pp. 351–364, (2005).
16. Kim, J.H. and Paulino, G.H., "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 10, pp. 1457–1497, (2003).
17. Rice, J.R., "A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by

notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 35, No. 2, pp. 379–386, (1968).

18. Eftis, J., Subramonian, N. and Liebowitz, H., "Crack border stress and displacement equations revisited", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 9, No. 1, pp. 189–210, (1977).
19. Yau, J.F., Wang, S.S. and Corten, H.T., "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 47, No. 2, pp. 335–341, (1980).
20. Abanto-Bueno, J. and Lambros, J., "An Experimental Study of Mixed Mode Crack Initiation and Growth in Functionally Graded Materials", *Experimental Mechanics*, Vol. 46, pp. 179-196, (2006).
21. Oral, A., Lambros, J. and Anlas, G., "Crack initiation in functionally graded materials under mixed mode loading, experiments and simulations", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME 75, No. 5, pp. 1-8, (2008).
22. Ayatollahi, M.R., Pavier, M.J. and Smith, D.J., "Mode I cracks subjected to large T-stresses", *International Journal of Fracture*, Vol. 117, pp. 159–174, (2002).
23. Becker, T.L., Cannon, R.M. and Ritchie, R.O., "Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials", *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 38, pp. 5545-5563, (2001).
24. Sedighiani, K., Mosayebnejad, J., Ehsasi, H. and Sahraei, H.R., "The effect of T-Stress on the brittle fracture under mixed mode loading", *Procedia Engineering 10*, pp. 774-779, (2011).